Задача 1

З Києва до Дніпра на катері можна дістатись річкою за 8 годин, а з Дніпра до Києва – за 10 годин. За скільки годин можна дістатися з Києва до Дніпра на плоту?

Розв’язання

Позначимо швидкість катера через v, а швидкість течії Дніпра – через u. Якщо катер пливе з Києва до Дніпра, він рухається за течією, і його швидкість відносно берега дорівнює $v+u$, а у зворотному напрямку – $v-u$. Позначимо відстань від Києва до Дніпра як L. Тоді із Києва до Дніпра катер буде плисти

$$t_1 = \frac{L}{v+u} = 8 \text{ годин}, \tag{1}$$

а з Дніпра до Києва –

$$t_2 = \frac{L}{v-u} = 10 \text{ годин}. \tag{2}$$

Шлях із Києва до Дніпра на плоту триватиме $t_0 = L/u$ годин.

Перетворимо рівняння (1) та (2) так:

$$\begin{aligned} \frac{v}{L} + \frac{u}{L} &= t_1^{-1}, \\ \frac{v}{L} - \frac{u}{L} &= t_2^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Якщо відняти з першого з рівнянь (3) друге, отримаємо

$$2\frac{v}{L} = t_1^{-1} - t_2^{-1}.$$

Звідси

$$t_0 = \frac{L}{v} = \frac{2}{t_1^{-1} - t_2^{-1}} = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо

$$t_0 = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10}{10 - 8} = 80 \text{ годин}.$$

Відповідь: 80 годин.

Задача 2

Знайти значення виразу $\sqrt[3]{1-2\sqrt{7}}\sqrt[6]{29+4\sqrt{7}}$.

Розв'язання

Перетворимо перший множник з використанням формули для квадрату суми. При цьому візьмемо до уваги, що $1<2\sqrt{7}$, тому результат піднесення до квадрату виразу $1-2\sqrt{7}$ повинен бути від'ємним.

$$\sqrt[3]{1-2\sqrt{7}}=\left(1-2\sqrt{7}\right)^{1/3}=\left(1-2\sqrt{7}\right)^{2/6}=\left(-\left(1-2\sqrt{7}\right)^{2}\right)^{1/6}=$$
$$=-\left(1-2\cdot 2\cdot\sqrt{7}+4\cdot 7\right)^{1/6}=-\left(29-4\sqrt{7}\right)^{1/6}=-\sqrt[6]{29-4\sqrt{7}}$$
.

Тоді вихідний вираз можна перетворити як

$$\sqrt[3]{1-2\sqrt{7}}\sqrt[6]{29+4\sqrt{7}}=-\sqrt[6]{\left(29-4\sqrt{7}\right)\left(29+4\sqrt{7}\right)}=-\sqrt[6]{29^{2}-\left(4\sqrt{7}\right)^{2}}=$$
$$=-\sqrt[6]{841-112}=-\sqrt[6]{729}=-3.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{1-2\sqrt{7}}\sqrt[6]{29+4\sqrt{7}}=-3$.

Задача 3

Червона Шапочка несла бабусі 28 однакових на вигляд пиріжків. Кількість пиріжків з м’ясом відносилася до кількості пиріжків з грибами й до кількості з капустою як 2:2:3. Дорогою дівчинка зголодніла та вирішила з’їсти один пиріжок. Яка ймовірність того, що перший пиріжок, навмання витягнутий з кошика, буде з м’ясом?

Розв'язання.

Відомо, що кількість пиріжків із різними начинками відноситься як 2:2:3. Для визначення кількості різних пиріжків позначимо кількість пиріжків з м’ясом за $2x$, пиріжків з грибами теж буде $2x$, а з капустою – $3x$. Загальна кількість пиріжків дорівнює 28, отже отримуємо рівняння

$$2x+2x+3x=28,$$

Звідси $7x=28,\ x=4$.

Отже, з м’ясом було 8 пиріжків, з грибами – 8, а з капустою – 12.

Ймовірність того, що перший пиріжок, навмання витягнутий з кошика, буде з м’ясом дорівнюватиме відношенню P = 8:28 = 2:7.

Відповідь: 2:7.

Задача 4

Позначимо корені рівняння $x^2 - 3ax + a = 0$ через x_1 та x_2. Причому $x_1^2 + x_2^2 = 1.75$. Знайти параметр a.

Розв'язання.

Квадратне рівняння

$$x^2 - 3ax + a = 0 \tag{4}$$

має два дійсних кореня, якщо його дискримінант є невід’ємним: $D = 9a^2 - 4a \geq 0$. Із цієї нерівності зрозуміло, що

$$a \in (-\infty; 0] \cup \left[4/9; +\infty\right). \tag{5}$$

Запишемо теорему Вієта для рівняння (4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3a, \\ x_1 \cdot x_2 = a. \end{cases} \tag{6}$$

Визначимо квадрат суми коренів рівняння (4)

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2) + 2 \cdot x_1 \cdot x_2. \tag{7}$$

Зважаючи на умову $x_1^2 + x_2^2 = 1.75$ та підставляючи до (7) рівняння із системи (6), отримуємо квадратне рівняння відносно параметра a:

$$9a^2 = 1.75 + 2a \Leftrightarrow 9a^2 - 2a - 1.75 = 0. \tag{8}$$

Знайдемо дискримінант рівняння (8) $D = 4 - 4 \cdot 9 \cdot (-1.75) = 4 + 63 = 67$ та його корені $a_{1,2} = \left(2 \pm \sqrt{67}\right)/18$. Обидва корені задовольняють умові (4): $\left(2 - \sqrt{67}\right)/18 < 0,\ \left(2 + \sqrt{67}\right)/18 > 4/9$. Отже, обидва знайдені значення для a задовольняють умовам задачі.

Відповідь: $\dfrac{2 - \sqrt{67}}{18}$; $\dfrac{2 + \sqrt{67}}{18}$

Задача 5

Суцільний металевий конус, радіус основи якого дорівнює 9 см, а висота – 4 см, переплавили на кульки однакового розміру, радіус кожної з яких – 1 см. Скільки таких кульок отримали? Втратами металу при переплавленні знехтуйте.

Розв'язання

Кількість кульок, що отримали, дорівнює відношенню об'ємів конуса і однієї кульки. Об'єм конуса дорівнює $1/3h\pi r^2$, де h – висота конуса, а r – радіус його основи, а об'єм кульки визначається як $4\pi/3R^3$, де R – радіус кульки. Для того, щоб знайти кількість кульок після переплавлення, необхідно розділити об'єм конуса на об'єм однієї кульки:

$$N = \frac{(1/3)h\pi r^2}{(4/3)\pi R^3} = \frac{hr^2}{4R^3} = \frac{4см\cdot(9см)^2}{4\cdot(1см)^3} = 9^2 = 81.$$

Відповідь: 81 кулька.

Задача 6

Нехай $a = \log_3 54, b = \log_{54} 19$. Виразити $\log_{12} 57$ через a та b.

Розв'язання

Перепишемо вирази для логарифмів через степені основи:

$a = log_3 54 \ \rightarrow \ 3^a = 54;$

$b = log_{54} 19 \ \rightarrow \ 54^b = 19;$

$x = log_{12} 57 \ \rightarrow \ 12^x = 57.$

Тут x – шукана величина, яку потрібно виразити через a та b.

Використовуючи перше рівняння, 54^b в другому рівнянні можна переписати як $54^b = (3^a)^b = 3^{a \cdot b}$. Тепер друге рівняння має вигляд $3^{a \cdot b} = 19$.

Далі перепишемо третє рівняння:

$12^x = 57 = 19 \cdot 3 = 3^{a \cdot b} \cdot 3 = 3^{a \cdot b + 1}.$

Для того, щоб отримати шукану величину x, візьмемо від останнього рівняння логарифм за основою 12:

$$x = \ log_{12} 3^{a \cdot b + 1} = (a \cdot b + 1) \cdot log_{12} 3 = \frac{a \cdot b + 1}{log_3 12}.$$

Виразимо $log_3 12$ через a, для цього виразимо 12 через 54:

$$12 = \frac{36}{3} = \frac{6 \cdot 6}{3} = \left(\frac{54}{9}\right) \cdot \left(\frac{54}{9}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{54^2}{3^5}.$$

$$log_3 12 = log_3 \left(\frac{54^2}{3^5}\right) = log_3 54^2 - log_3 3^5 = 2 \cdot log_3 54 - 5 \cdot log_3 3 = 2 \cdot a - 5.$$

Відповідь: $log_{12} 57 = \frac{a \cdot b + 1}{2 \cdot a - 5}$.

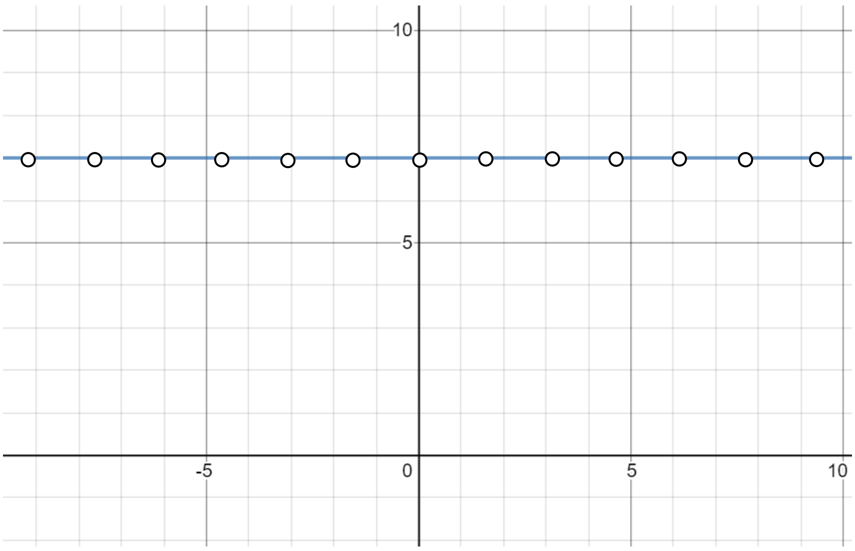
Задача 7

Побудувати графік функції $y = 7^{tg\,x \cdot ctg\,x}$.

Розв'язання

Оскільки $tg\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, а $ctg\,x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, то $tg\,x \cdot ctg\,x = 1$ за винятком точок, де $tg\,x$ та $ctg\,x$ не визначені: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отже, графіком функції $y = 7^{tg\,x \cdot ctg\,x}$ буде пряма $y = 7$ із виколотими точками $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь (див. рисунок нижче):



Задача 8

Розв'язати нерівність $\cos\left(x+3tg\,x\right)+\left(tg\,x-tg^2\,x\right)^2\le -1$.

Розв'язання

Згадаємо область значень $\cos\alpha$, а саме те, що $-1\le\cos\alpha\le 1$для будь-яких α. Помітимо також, що $\left(tg\,x-tg^2\,x\right)^2\ge 0$. Отже, непорожній розв'язок можливий лише за умови, якщо одночасно виконуються рівності $\cos\left(x+3tg\,x\right)=-1$ та $\left(tg\,x-tg^2\,x\right)^2=0$. Це, у свою чергу, еквівалентно розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} x+3tg\,x=(2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{Z}; \\ tg\,x\cdot\left(1-tg\,x\right)=0. \end{cases}$$

Друге рівняння може виконуватися у випадках $tg\,x=0$ або $tg\,x=1$. Останній випадок є не сумісним із першим рівнянням, бо x має бути $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ та одночасно задовольняти умові $x+3=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, що не виконується за жодних $k,n\in\mathbb{Z}$. У випадку $tg\,x=0$ маємо $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, що перетворює перше рівняння системи на $\pi n=(2k+1)\pi$ або $n=2k+1$. Отже, розв'язками є всі $x=\pi n,$ де $n-$ непарне ціле число ($n=2k+1, k\in\mathbb{Z}$).

Відповідь: $x=\pi(2k+1), k\in\mathbb{Z}$.